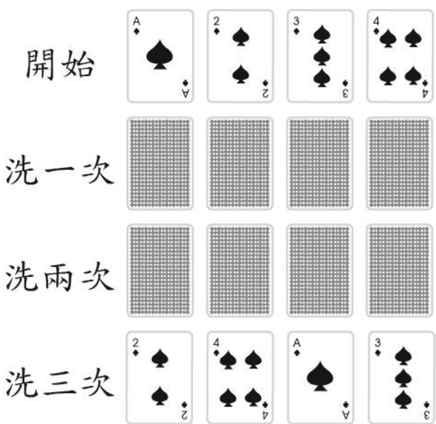
47 會洗牌的猴子…合成函數的使用

尼采在《拜火教教主如是說》這本書裡，有一段耐人咀嚼的哲學思考:「當你見到猴子笨拙的行為時,你該覺得好笑還是自卑呢？到底是取笑猴子的不靈活,笨手笨腳的行為，還是對笨拙的猴子可以演化出人類，而我們似乎很難比牠們進步得更多感到自卑呢？」人類之所以異於動物，主要是具有靈巧的雙手與聰明的大腦。據說一百多年前當科學家還無法瞭解頭腦內部結構時,就以頭殼的外型來測量智商的多寡。就是科學昌明的現代，還是有很多人相信皮指紋分析可以找出孩子的才能，用指紋的「渦紋」和「蹄狀紋」兩種紋路來判斷性格及命運傾向。

就讓我們來欣賞一道具有靈巧雙手，但普通頭腦的猴子所玩的把戲：

有一隻會洗牌的猴子，牠只會洗四張牌，而且每次都用同樣的模式洗牌。猴子的主人拿出分別寫著 1, 2, 3, 4 *的四張牌給猴子，並將牌子排好，讓上而下的順序為編號* 1, 2, 3, 4 *的四張牌，如下圖的第一列所示：*



猴子洗第一次牌後不讓主人看牌子的順序，接著洗第二次牌，仍然不給主人看，然後猴子洗第三次牌，並讓主人看牌號的順序。這時主人發現從上而下的牌號為

$$2, 4, 1, 3.$$

猴子的主人想了一下說：「他知道猴子洗第一次牌後，牌號從上而下的順序。」你知道嗎？

洗牌的方式有很多種，但無論如何洗，最後它總是 1, 2, 3, 4 這四個數字的某種重新排列，又四個數字排成一列計有

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

種不同的排法，所以只需仔細討論這 24 種排法中，哪一種可以在經歷三次同樣操作後，順序變成 2, 4, 1, 3 即可。我們把這 24 種排列（以下稱為洗牌法）根據其特性分成三大類：

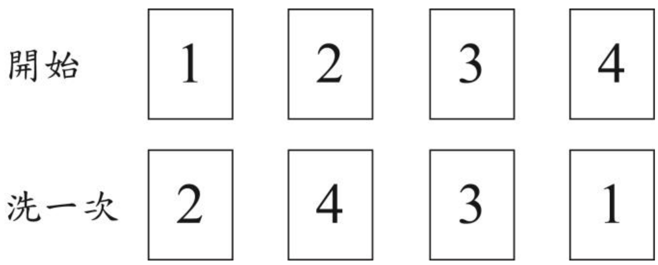
① （有固定點的洗牌法）如下圖所示，在洗一次牌後，順序為

$$2, 4, 3, 1.$$

將這順序跟開始的

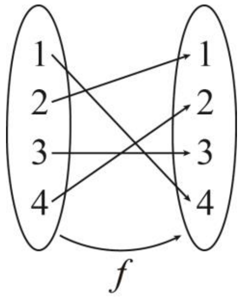
$$1, 2, 3, 4$$

比較，將會發現 3 號牌沒有變動。

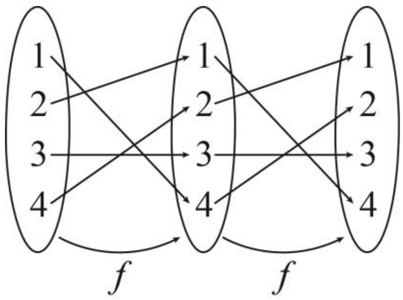


像這種有固定點的洗牌法，無論洗幾次，固定的牌還是紋風不動。在猴子洗牌遊戲中，洗三次之後並沒有固定不動的牌，所以猴子會的洗牌法不屬於這種。

為了節操作省空間及方便解釋，在這裡我們引入函數的關係來解釋洗牌：前面所提的洗牌法（將 1 洗到 4 的位置，2 洗到 1 的位置，3 洗到 3 的位置，4 洗到 2 的位置）也可以用如下的函數 f 來表示：



從圖中不難發現水平的對應箭號→就是不動牌 3 的位置。當以這樣的洗牌方式洗兩次時，會對應到合成函數 $f^2 = f \circ f$ 的結果，圖示如下：

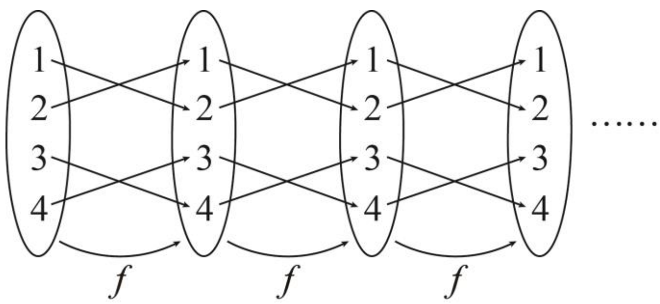


此時，1 號牌會洗到 $f^2(1) = f(f(1)) = f(4) = 2$ 的位置，2 號牌會洗到 $f^2(2) = f(f(2)) = f(1) = 4$ 的位置，3 號牌會洗到 $f^2(3) = f(f(3)) = f(3) = 3$ 的位置，4 號牌會洗到 $f^2(4) = f(f(4)) = f(2) = 1$ 的位置。不過從圖中的合成更容易看到這樣的洗牌效果。

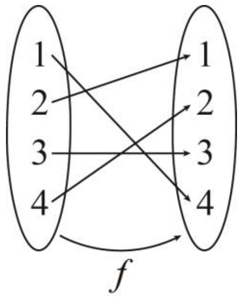
② （分成兩群的洗牌法）有一種比較奇怪的洗牌方法，例如洗玩之後從上而下的牌號為

2, 1, 4, 3.

這種洗牌法所對應的洗牌函數 f 為

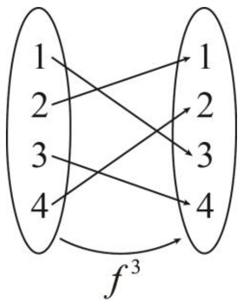


從洗牌函數 f 的合成中發現，無論洗幾次總是 1 與 2 位置的牌互相輪換，3 與 4 位置的牌互相輪換。又①中所舉例的洗牌函數



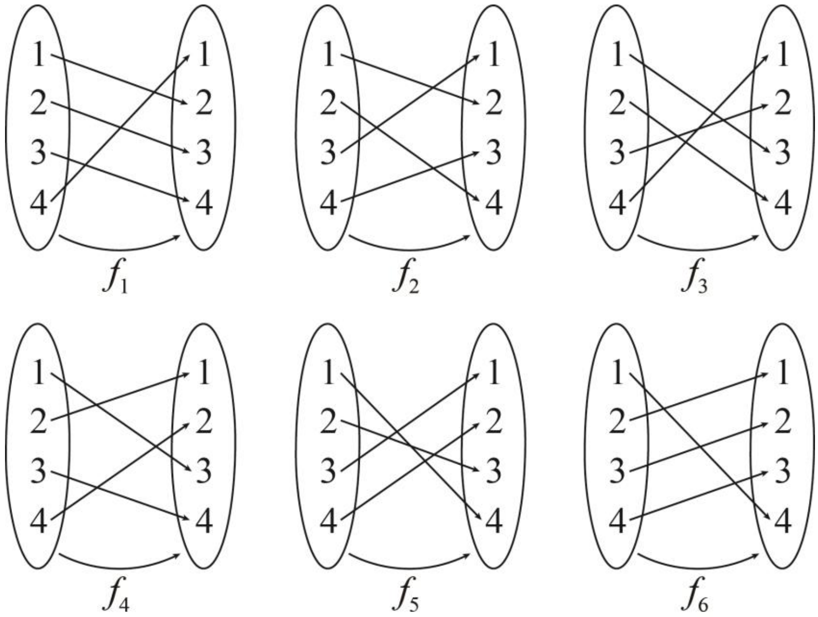
因為 3 的位置固定不動，其餘位置是$1\to4\to2\to1$的輪換，所以也算是分成$\{3\}$與$\{1,2,4\}$兩群的洗牌法。

猴子所對應的洗牌函數 f ，因為合成三次之後為

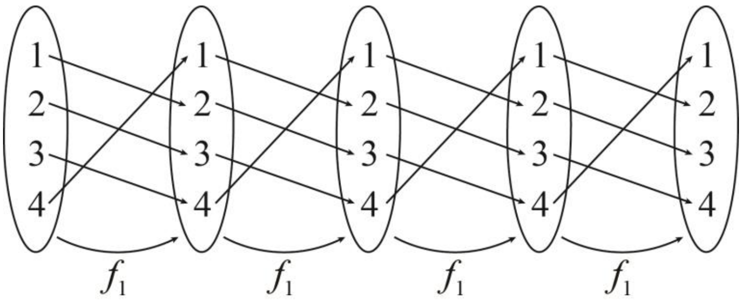


它是$1\to3\to4\to2\to1$的輪換，所以猴子洗牌的函數也不屬於這一類。

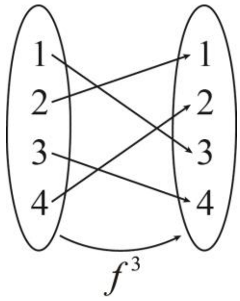
③（輪換式的洗牌法）這一類型的洗牌法就是沒有固定點，也沒有分成兩群自己輪換的洗牌方法，即四張牌一起輪換的意思。我們可以用窮舉法將四張牌一起輪換的洗牌函數 f 列舉如下，共計六種：



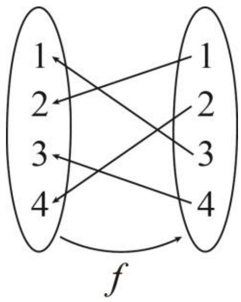
因為是四張牌輪換，所以四次之後會輪到原來的位置，以 f_1驗算如下：



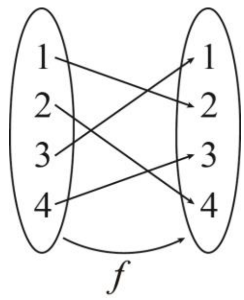
也就是說， $f_1^4(i)=i(i=1,2,3,4)$ ，即 f_1^4 是把每個元素對到自己的函數，稱它為單位函數。因為 $f_1^4, f_2^4, f_3^4, f_4^4, f_5^4, f_6^4$ 都是單位函數，又猴子洗牌函數 f 也是其中之一，所以 $f^4(i)=i(i=1,2,3,4)$。利用合成函數的性質 $f^4(i)=f^3\circ f(i)=i(i=1,2,3,4)$ 知道 f 與 f^3 互為反函數。因為



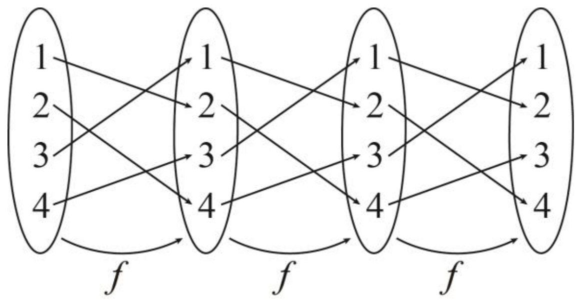
所以



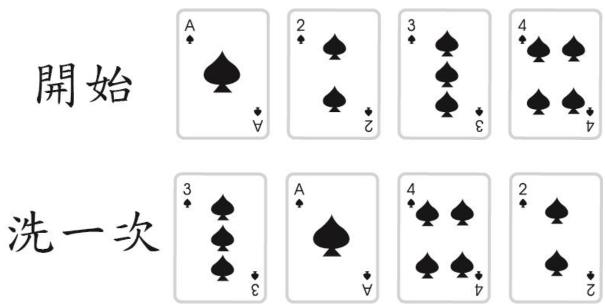
或



也就是說，猴子的洗牌函數 $f = f_2$。我們驗算它的三次合成，得



此與猴子洗牌三次之後給主人看的順序一致。故猴子洗一次牌後的順序為



最後我們來做個練習，如果洗五張牌，洗三次時，牌子的次序如下圖所示，那麼洗一次之後，牌子的次序為何呢？

開始	1	2	3	4	5
洗三次	2	4	5	3	1